<u>Дифракция на апертурах.(Фраунгофера.)</u>

Получили

$$A(k_x k_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(x,y) e^{i(k_x x + k_y y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$A(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(k_x,k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y$$

Данные выражения определяют угловое распределение в дифракционной картине.

Аналогия:

$$A(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

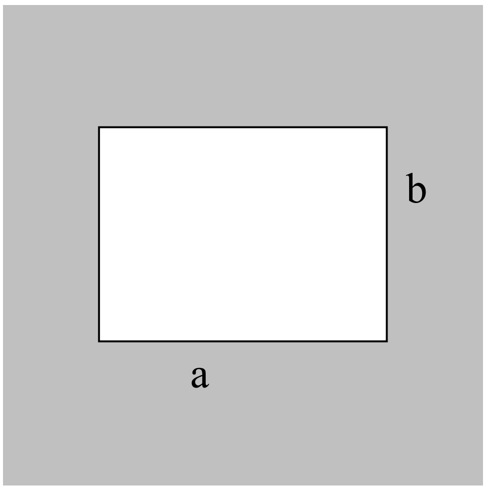
$$A(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} \mathrm{dt}$$

В случае дифракции вводятся пространственные частоты

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\varphi \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\psi, \text{ где } \sin\varphi = \frac{x}{R} \quad \sin\psi = \frac{y}{R}.$$

Если $A(x,y) = A_0 \mathrm{T}(x,y) e^{i\varphi(x,y)}$, где $\mathrm{T}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, на апертуре} \\ 0 & \text{, вне апертуры.} \end{cases}$, а $e^{i\varphi(x,y)}$- сдвиг фаз, набираемый на апертуре, то можно описать дифракцию на любом объекте. Фактически мы ввели фазовый коэффициент пропускания. Если на апертуру падает волна E_0, после нее $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0\, \mathrm{T}(x,y) e^{i\varphi(x,y)}$.

1. Дифракция на прямоугольной апертуре.



В этом случае

$$\mathrm{T}(x,y) = \begin{cases} 1 & , \begin{matrix} -\dfrac{a}{2} \le x \le \dfrac{a}{2} \\ -\dfrac{b}{2} \le y \le \dfrac{b}{2} \end{matrix} \\ 0 & \text{, при других } x, y. \end{cases}$$

$$A(k_x,k_y)=A_0\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{-ik_x x}dx\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{d}{2}}e^{-ik_y y}dy=A_0ab\frac{e^{ik_x\frac{a}{2}}-e^{-ik_x\frac{a}{2}}}{ik_x}\frac{e^{ik_y\frac{b}{2}}-e^{-ik_y\frac{b}{2}}}{ik_y}$$

$$A(k_xk_y)=A_0ab\frac{\sin k_x\frac{a}{2}}{k_x\frac{a}{2}}\frac{\sin k_y\frac{b}{2}}{k_y\frac{b}{2}}$$

$$k_x\frac{a}{2}=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{a}{2}\sin\varphi$$

$$k_y\frac{b}{2}=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{b}{2}\sin\psi$$

$$\boxed{A(k_xk_y)=A_0\left(\frac{\sin k_x\frac{a}{2}}{k_x\frac{a}{2}}\right)\left(\frac{\sin k_y\frac{b}{2}}{k_y\frac{b}{2}}\right)}$$

$$I(\sin\varphi,\sin\psi)=I_0\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$$

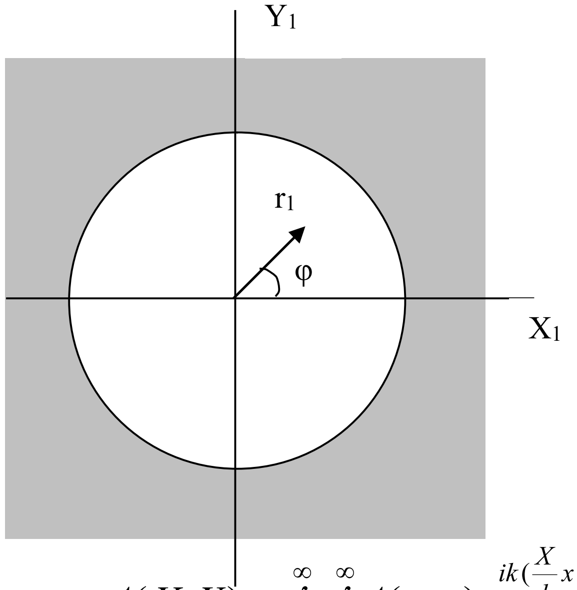
Амплитуда равна 0 при $\frac{\pi}{\lambda}a\sin\varphi=m\pi$, где $m=1,2,3,.....$

Условие минимума $\begin{cases}a\sin\varphi=m\lambda\\ b\sin\psi=k\lambda.\end{cases}$

2. Дифракция на круглом отверстии.

3. Для описания дифракции на круглом отверстии необходимо перейти в полярные координаты в плоскости объекта и в плоскости, в которой рассматривается дифракция. . Функция пропускания для отверстия радиуса R имеет вид:

$$T(r)=\begin{cases}1,\ при\ r\le R\\ 0,\ при\ r>R\end{cases}.$$



$$A(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(x,y)e^{ik(\frac{X}{l}x+\frac{Y}{l}y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$x=r_1\cos\varphi_1 \qquad X=r_2\cos\varphi_2$$

$$y=r_1\sin\varphi_1 \qquad Y=r_2\sin\varphi_2$$

$$\frac{Xx}{l}+\frac{Yy}{l}=\frac{r_1r_2}{l}\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)=\frac{r_1r_2}{l}\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\mathrm{ds}=r_1\mathrm{d}\varphi_1\mathrm{d}r$$

$$A(r_2,\varphi_2)=A_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{R}e^{-ik\frac{r_1r_2}{l}\cos(\varphi_2-\varphi_1)}r_1\,\mathrm{d}r$$

$$A(r_2,\varphi_2)=A_0\int_0^{R}r_1\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}e^{-ik\frac{r_1r_2}{l}\cos(\varphi_2-\varphi_1)}\mathrm{d}\varphi_1$$

Примечание: $\int_0^{2\pi}e^{-ig\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=2\pi I_0(g)$, где $I_0(g)$-функция Бесселя 0-ого порядка.

$$g=k\frac{r_1r_2}{l}$$

$$A(r_2,\varphi_2)=2\pi A_0\int_0^{R}r_1\,\mathrm{d}r_1 I_0(k\frac{r_1r_2}{l})$$

Свойство функции Бесселя $\int_0^{x_0}xI_0(x)\mathrm{d}x=x_0I_1(x_0)$

$$x=k\frac{r_1r_2}{l} \quad \mathrm{d}x=k\frac{r_2}{l}\mathrm{d}r_1 \quad \mathrm{d}r_1=\frac{l}{kr_2}\mathrm{d}x \quad r_1=\frac{xl}{kr_2}$$

$$A(r_2,\varphi_2)=2\pi A_0\left(\frac{l}{kr_2}\right)^2\left(k\frac{Rr_2}{l}\right)I_1\left(k\frac{Rr_2}{l}\right)$$

$$u(r_2,\varphi_2)=2\pi A_0 R^2 \frac{I_1(k\frac{Rr_2}{l})}{k\frac{Rr_2}{l}}=2A_0\frac{I_1(k\frac{Rr_2}{l})}{k\frac{Rr_2}{l}}$$

{ ДВА рисунка графика функции Бесселя}

x=3.83, 7.01-1-вые о функции Бесселя

$kR\sin\theta=3.83$

$\sin\theta=\frac{3.83\lambda}{2\pi R}$

$\sin\theta=1.22\frac{\lambda}{D}$

4. Разрешающая способность телескопа

{Рисунок}

$\varphi>1.22\frac{\lambda}{D}$

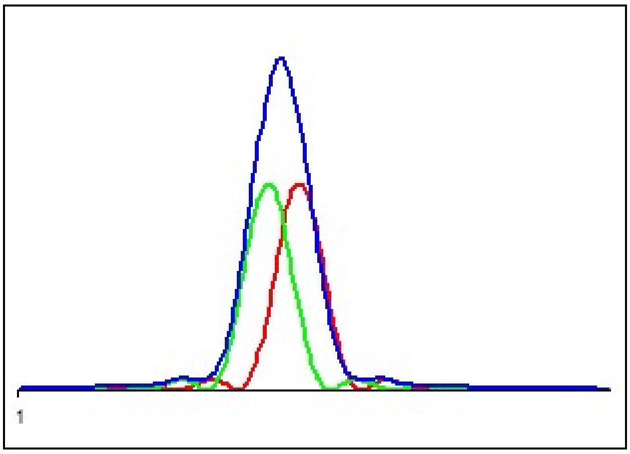
$D=6$м - самый большой телескоп в СССР.

$\varphi_{\min}=1.22\frac{0.5\cdot 10^{-4}}{6\cdot 10^{-2}}\approx 10^{-7}$

Спичка с расстояния 500 км.

Оптика $\lambda_{\min}=200$нм. В электронной микроскопии $\lambda=\frac{k}{m\mathbf{V}}$

$\frac{mV^2}{2}=eU$



5. Дифракция Гауссова пучка.

$$A(x,y)=A_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{d^2}}$$

$$A(k_x)=2A_0\int_0^\infty e^{(ik_x x-\frac{x^2}{d^2})}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{x^2}{d^2}-ik_x x=\frac{x^2}{d^2}-2ik_x\frac{x}{d}\frac{d}{2}+\left(i\frac{k_x d}{2}\right)^2-\left(i\frac{k_x d}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{d}-i\frac{k_x d}{2}\right)^2+\left(\frac{k_x d}{2}\right)^2$$

$$A(k_x)=2A_0 e^{-\left(\frac{k_x d}{2}\right)^2}\int_0^{\infty}e^{-\left(\frac{x}{d}-i\frac{k_x d}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x=2A_0 e^{-\left(\frac{k_x d}{2}\right)^2}d\frac{\sqrt{\pi}}{2}=A_0 d\sqrt{\pi}e^{-\left(\frac{k_x d}{2}\right)^2}$$

$$A(k_x,k_y)=A_0 d^2\pi e^{-\frac{d^2}{4}\left(k_x^2+k_y^3\right)}=A_0 d^2\pi e^{-\frac{d^2}{4}k_r^2}$$

$$\sin\varphi=\frac{r}{R}$$

Получили функцию Гаусса от $\sin\varphi$.

Функция гладкая не имеет минимума {Рисунок}